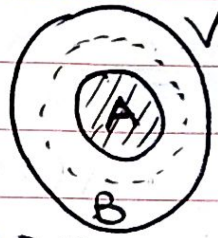
Διάλεξη 7η 19/11/2019 ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Λήμμα: A κλειστό, B συμπαγές $\Rightarrow d(A,B)>0$ αν $A\cap B=\emptyset$

Ορισμός: (X,d) τοπικά συμπαγής μ.χ. αν $\forall x\in X$ $\exists r_x>0$ τ.ω $B(x,r_x)$: συμπαγής.

Θεώρημα: Έστω (X,d) τοπικά συμπαγής, $V\subseteq X$, V: ανοιχτό, $A\subseteq V$, A: συμπαγές. Τότε $\exists$ B: ανοιχτό τ.ω $A\subseteq B\subseteq \bar{B}\subseteq V$.



Απόδ

$A\cap V^c=\emptyset$

A συμπαγές, V^c: κλειστό $\xRightarrow{\text{Λήμμα}}$ $\overset{a}{\overbrace{d(A,V^c)}}>0$

$\forall x\in A$, $\exists r_x>0$ τ.ω $B(\bar{x},r_x)$ συμπαγής. Θέτουμε $U_x=B(x,r_x)$. Όμως A: συμπαγές $\Rightarrow$ $(A\subseteq \bigcup_{x\in A} U_x)$: $\exists\, x_1,\dots,x_n\in A$ τ.ω $A\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$

Αν $r_x<a/2$ τότε είμαστε οκ.

Αν $s_x<\frac{a}{2}\le r_x \Rightarrow B(x,s_x)\subseteq B(x,r_x)$

Ισχυρισμός: $\bar{U}_{x_i}\subseteq V$, $i=1,\dots,n$

Απόδ. ισχυρισμού

Έστω $i\in\{1,\dots,n\}$, $\forall y\in U_{x_i}$, $d(x_i,y)<a/2$

Έστω $y\in V^c \Rightarrow d(x_i,y)\ge a$

Θέτουμε $B=\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$, $\bar{B}=\bigcup_{i=1}^{n}\bar{U}_{x_i}\subseteq V$.

Άρα $\bar{B}\subseteq V$.

Θεώρημα: (Ύπαρξη διαμερισμού της μονάδος)

Έστω (X,d) μ.χ. ο οποίος είναι τοπικά συμπαγής. $V_1,\dots,V_n \subseteq X$: ανοιχτά, $A \subseteq V_1 \cup \dots \cup V_n$: συμπαγές. Τότε $\exists$ συνεχείς συναρτήσεις $f_1,\dots,f_n: X \to [0,1]$ τ.ω.:

i) $supp(f_i) \subseteq V_i$

ii) $supp(f_i)$: συμπαγής

iii) $\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)\Big|_A \equiv 1$.

$supp(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$

π.χ. • $f(x) = x$, $supp(f) = \mathbb{R}$.

• $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, $supp(f) = (-\infty, 0]$.

Απόδ

Για $x \in A$, $\exists\, i \in \{1,\dots,n\}$ τ.ω $x \in V_i$. Όμως $\exists r_x > 0$: $\overline{B(x,r_x)}$ συμπαγές σύνολο, και $\overline{B(x,r_x)} \subseteq V_i$, διότι $\exists r_1 > 0$ τ.ω $\overline{B(x,r_1)}$ να είναι συμπαγής. Επίσης $\exists r_2 > 0$: $B(x,r_2) \subseteq V_i \Rightarrow \overline{B(x,r_2/2)} \subseteq B(x,r_1) \subseteq V_i$.

Παίρνω $r_x = \min\{r_1, r_2/2\}$.

Έχω $\{B(x,r_x) : x \in A\}$ ανοιχτή κάλυψη του $A \overset{A}{\underset{\text{συμπαγές}}{\Longrightarrow}}$ $\exists x_1,\dots,x_n \in A$ τ.ω $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_{x_i})$.

Θέτουμε $O_j = \bigcup_{\substack{i \in \{1,\dots,n\} \\ B(x_i,r_{x_i}) \subseteq V_j}} B(x_i, r_{x_i})$, $j = 1,\dots,n$

$\overline{O_j}$: συμπαγές

και $\overline{O_j} \subseteq V_j$

Για $i=1,\dots,n$, $\exists B_i$ ανοιχτό, τ.ω $\overline{B_i}$ συμπαγές τ.ω $\overline{O_i} \subseteq B_i \subseteq \overline{B_i} \subseteq V_i$

Χρησιμοποιώντας το λήμμα Urysohn: έχω ότι:
Έστω A, B κλειστά, $A \cap B = \emptyset$. Τότε $\exists g: X \to [0,1]$, τ.ω $g|_A = 0$, $g|_B = 1$.
Από Urysohn: $\exists$ μια συνάρτηση $g_i: X \to [0,1]$ τ.ω $g_i|_{\overline{O_i}} = 1$ και $g_i|_{B_i^c} = 0$, $i = 1,\dots,n$.
και υπάρχει $h: X \to [0,1]$ τ.ω $h|_A = 1$ και $h|_{(\bigcup_{i=1}^n O_i)^c} \equiv 0$, όπου $g_1,\dots,g_n, h$ είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Σχηματικά:

μαύρο μόνο στο μέσο, 0 οπουδήποτε αλλού.

Θέτουμε $g = (1-h) + \sum_{i=1}^n g_i > 0$

Θέτουμε $f_i = g_i / g \Rightarrow \forall x \in A$, $1 - h(x) = 0$.

και $\sum_{i=1}^n f_i(x) = \sum_{i=1}^n \frac{g_i(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{g_i(x)}{\sum_{i=1}^n g_i(x)} = 1$

Έστω $x \in \bigcup_{i=1}^n \overline{O_i} \Rightarrow \exists i \in \{1,\dots,n\}$, $x \in \overline{O_i} \Rightarrow g_i(x) = 1 > 0$
$\Rightarrow g(x) > 0$. Αν $x \notin \bigcup_{i=1}^n \overline{O_i} \Rightarrow$
$x \in (\bigcup_{i=1}^n O_i)^c \Rightarrow$

$1 - h(x) = 1 \Rightarrow g(x) > 0$

Θεώρημα: (Επέκτασης του Tietze)
Έστω A κλειστό, $A \subseteq X$, (X,d) μ.χ. και έστω $f: A \to \mathbb{R}$ συνεχής (*) συνάρτηση. Τότε $\exists$ συνεχής επέκταση $\tilde{f}: X \to \mathbb{R}$ τ.ω.
$\sup_A |f| = \sup_X |\tilde{f}|$

Λήμμα: Έστω $A \subseteq X$ κλειστό, $f: A \to \mathbb{R}$ συνεχής. Έστω $c > 0$ τ.ω: $|f(x)| \le c$, $\forall x \in A$. Τότε $\exists$ $g: X \to \mathbb{R}$ συνεχής τ.ω $\forall x \in X$ να ισχύει
i) $|g(x)| \le c/3$, $\forall x \in A$ και ii) $|f(x) - g(x)| \le \frac{2c}{3}$.

(*) $f: A \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow$ $\forall x_0 \in A$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ τ.ω $\forall x \in B(x_0, \delta) \cap A$: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Αποδ

i) Θέτουμε $Y = f^{-1}([-c, -\frac{1}{3}c])$, $Z = f^{-1}([\frac{1}{3}c, c])$
$= \{x \in A : -c \le f(x) \le -\frac{1}{3}c\}$

Y κλειστό στο $A \Rightarrow \exists$ κλειστό $\Gamma \subseteq X$ τ.ω $Y = \Gamma \cap A$
$\Rightarrow Y$ κλειστό στον X
Αλλιώς: έστω $\{x_n\} \subseteq Y \Rightarrow -c \le f(x_n) \le -\frac{1}{3}c$, $\forall n$.
Αν $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x) \Rightarrow -c \le f(x) \le -\frac{1}{3}c$
$\Rightarrow x \in Y \Rightarrow Y$: κλειστό

Ομοίως Z: κλειστό
Y, Z είναι κλειστά και ξένα, άρα από λήμμα Uryshon $\exists$ $h: X \to [0,1]$ τ.ω h συνεχής.
$h|_Y = 0$, $h|_Z = 1$. Θέτουμε $g = \frac{2c}{3}(h - 1/2)$

$\forall x \in Y$, $h(x) = 0 \Rightarrow |g(x)| = \frac{c}{3}$.

$\forall x \in Z$, $h(x) = 1 \Rightarrow |g(x)| = \frac{c}{3}$

$\forall x \in X \setminus (Y \cup Z)$; $0 \leq h(x) \leq 1$. Δηλαδή $-\frac{1}{2} \leq h(x) - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$
$\Rightarrow |g(x)| \leq \frac{2c}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{c}{3}$.

ii) Έστω $x \in A$. Αν $x \in Y$: $-c \leq f(x) \leq -\frac{c}{3} \Rightarrow$
$0 \leq g(x) - f(x) \leq c - \frac{c}{3} = \frac{2c}{3}$.

Αν $x \in Z$: $\frac{c}{3} \leq f(x) \leq c \Rightarrow -\frac{2c}{3} \leq g(x) - f(x) \leq 0$

Αν $x \in A \setminus (Y \cup Z)$: $-\frac{c}{3} < f(x) < \frac{c}{3} \Rightarrow$

$$-\frac{2c}{3} < g(x) - f(x) < \frac{2c}{3}$$

$\Rightarrow \forall x \in A$, $|g(x) - f(x)| < \frac{2c}{3}$.

Ειδική περίπτωση: $f(A) \subseteq [-1, 1]$

Για $n = 1, 2, \ldots$, ορίζουμε επαγωγικά μια συνεχή συνάρτηση $g_n : X \to \mathbb{R}$ τ.ω

i) $|g_n(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, $\forall x \in X$.

ii) $\left|f(x) - \sum_{i=1}^{n} g_n(x)\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$, $\forall x \in A$.

Για $n = 1$: ισχύει ($c = 1$). Έστω ότι ισχύει για $n = k$.
Θδο $\exists$ συνάρτηση $g_{k+1} : X \to \mathbb{R}$ συνεχής τ.ω να ισχύουν τα (i) και (ii) με $n = k+1$.
Όπου f θα βάλω την $f - \left(\sum_{i=1}^{k} g_i\right)\Big|_A$.

Όπου c παίρνω $\left(\frac{2}{3}\right)^k$. Τότε $\exists$ $g : X \to \mathbb{R}$ συνεχής με i) $|g_{k+1}(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k$, $\forall x \in X$.
ii) $\left|\left(f(x) - \sum_{i=1}^{k} g_i(x)\right) - g_{k+1}(x)\right| \leq \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}$.

Θέτω $\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)$, $x \in X$.

$\sum_{i=1}^{n} |g_i(x)| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ φραγμένο. $\Rightarrow$

$\sum_{i=1}^{n} |g_i(x)|$: συγκλίνει $\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)$: συγκλίνει.

Θέτω $f_n = \sum_{i=1}^{n} g_i$.

Ισχυρισμός: $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} \tilde{f}$ στο X. : $|\tilde{f}(x) - f_n(x)| = |\sum_{i=n+1}^{\infty} g_i(x)|$

$\leq \sum_{i=n+1}^{\infty} |g_i(x)| \leq \frac{1}{3} \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

$\xrightarrow{n \to \infty} 0$

Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n \geq n_0$ να ισχύει $\frac{1}{3} \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} < \varepsilon$.

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall x \in X$: $|\tilde{f}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

Η $\tilde{f}$ είναι συνεχής διότι όλες οι f_n είναι συνεχείς.

Επίσης $(ii) \Rightarrow \tilde{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in A$.

Τώρα αρκεί νδο $\sup \tilde{f}(x) = \sup f(x)$, $\forall x \in A$.

Θα υποθέσω ότι $\sup_A |f| = 1$. και τότε έχω

$|\tilde{f}(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |g_i(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} = 1$.

Το $\sup_X |\tilde{f}(x)| \geq \sup_A |\tilde{f}|$. Άρα στο A η $\tilde{f} = f$ άρα

$\sup_X |\tilde{f}(x)| \geq \sup_A |\tilde{f}| = \sup_A |f| = 1 \Rightarrow 1 \leq \sup_X |\tilde{f}(x)|$.